

DETERMINANTY SYNCHRONIZACJI
CYKLI KONIUNKTURALNYCH: ANALIZA
Z WYKORZYSTANIEM BMA I MIAR ŁĄCZNOŚCI.
CZĘŚĆ I – METODYKA BADANIA

WPROWADZENIE

Synchronizacja cykli koniunkturalnych ma fundamentalne znaczenie dla integrujących się gospodarek. Tylko kraje charakteryzujące się wysokim stopniem synchronizacji cykli koniunkturalnych mogą tworzyć efektywnie funkcjonujące unie walutowe. Jest tak dlatego, że ponadnarodowy bank centralny może skutecznie prowadzić jednolitą politykę pieniężną w sytuacji, gdy kraje należące do unii monetarnej znajdują się w tej samej fazie cyklu koniunkturalnego. Taki argument można podnieść w stosunku do zewnętrznie płynnego kursu walutowego, który jest uzależniony od polityki monetarnej wdrażanej przez bank centralny. Temat ten jest szczególnie istotny dla krajów Unii Europejskiej, które zdecydowały się na przystąpienie do strefy euro lub podejmują decyzję w sprawie tego, czy zostać członkiem Unii Gospodarczej i Walutowej.

Z tych względów bardzo ważny jest problem determinant synchronizacji cykli koniunkturalnych. Jest on bardzo szeroko analizowany w literaturze od 1996 roku¹. Jednak, pomimo że od tego czasu minęło już ponad 20 lat, w literaturze spotykamy bardzo dużą różnorodność wniosków na temat tego, jakie czynniki wpływają na synchronizację cykli koniunkturalnych. Rana² oraz

* Krzysztof Beck – dr, Uczelnia Łazarskiego w Warszawie, Wydział Ekonomii i Zarządzania, beckkrzysztof@gmail.com

¹ J.A. Frankel, A.K. Rose, *The Endogeneity of the Optimum Currency-Area Criteria*, „Economic Journal”, Tom 108, Nr 449, 1998, s. 1009–1025.

² P.B. Rana, *Trade Intensity and Business Cycle Synchronization: The Case of East Asian Countries*, „The Singapore Economic Review”, Tom 53, No. 2, 2008, s. 279–292.

Duval i inni³ stwierdzają, że podobieństwo polityki fiskalnej istotnie wpływa na synchronizację cykli koniunkturalnych, podczas gdy Clark i van Wincoop⁴, Beck⁵ oraz Chang i inni⁶ dochodzą do podobnych wniosków w odniesieniu do podobieństw w polityce monetarnej. Siedschlag⁷ i Beck⁸ wykazali, że podobieństwo struktur produkcji wpływa na synchronizację cykli, natomiast Fidrmuc⁹ i Rose¹⁰ mieli podobne wyniki w odniesieniu do uczestnictwa w unii walutowej. Z drugiej strony Baxter i Kouparitsas¹¹ uznają te zmienne za wrażliwe i podkreślają znaczenie handlu międzynarodowego oraz zmiennych grawitacyjnych.

Ze względu na to, że różne badania prowadziły do rozbieżnych, a często nawet wykluczających się wniosków w niniejszej pracy podjęto próbę analizy wszystkich tych czynników. W tym celu zastosowano bayesowskie łączenie wiedzy po modelach – BMA (*bayesian model averaging*), które pozwala na sprawdzenie, które spośród potencjalnych determinant rzeczywiście wpływają na synchronizację cykli koniunkturalnych. Ponadto w ramach BMA możliwe

³ R. Duval, K. Cheng, K. Hwa Oh, R. Saraf, D. Seneviratne, *Trade Integration and Business Cycle synchronization: A Reappraisal with Focus on Asia*, „IMF Working Paper Series”, WP/14/52, 2014, s. 1–45.

⁴ T.E. Clark, E. van Wincoop, *Borders and business Cycles*, „Journal of International Economics”, Tom 55, Nr 1, 2001, s. 59–85.

⁵ K. Beck, *Determinants of Business Cycles Synchronization in the European Union and the Euro Area*, „Equilibrium. Quarterly Journal of Economics and Economic Policy”, Tom 8, Nr 4, 2013, s. 25–48.

⁶ K. Chang, Y. Kim, M. Tomaljanovich, Y. Ying, *Do political parties foster business cycles? An examination of developed economies*, „Journal of Comparative Economics”, Tom 41, Nr 1, 2013, s. 212–226.

⁷ I. Siedschlag, *Patterns and Determinants of Business Cycles Synchronization in Enlarged European and Monetary Union*, „Eastern Journal of European Studies”, Tom 1, Nr 1, 2010, s. 21–44.

⁸ K. Beck, *Structural Similarity as a Determinant of Business Cycles Synchronization in the European Union: a Robust Analysis*, „Research in Economics and Business: Central and Eastern Europe”, Tom 5, Nr 2, 2013, s. 31–54 oraz K. Beck, *Determinanty synchronizacji cykli koniunkturalnych w krajach Unii Europejskiej w latach 1990–2007*, „Gospodarka w Teorii i Praktyce”, 1(34), 2014, s. 5–20..

⁹ J. Fidrmuc, *The Endogeneity of Optimum Currency Area Criteria, Intra-Industry Trade and EMU Enlargement*, „Contemporary Economic Policy”, Tom 22, Nr 1, 2004, s. 1–12.

¹⁰ A.K. Rose, *Understanding Business Cycle Synchronization: Is inflation targeting Paving the Way to Asian Monetary Union?*, [w:] (red.) R.J. Barro, J.W. Lee, *Costs and Benefits of Economic Integration in Asia*, Oxford Scholarship Online, 2011.

¹¹ M. Baxter, M. Kouparitsas, *Determinants of business cycle comovement: a robust analysis*, „Journal of Monetary Economics”, Tom 52, Nr 1, 2005, s. 113–157.

jest obliczenie miar łączności (*jointness*), które umożliwiają na określenie związków (substytucyjności i komplementarności) pomiędzy regresorami.

W prezentowanej tu części I opracowania przedstawione zostaną zagadnienia metodologiczne. W punkcie pierwszym przedstawiono miary zarówno synchronizacji cykli koniunkturalnych, jak i jej potencjalnych determinant. Determinanty wybrano na podstawie teorii oraz empirii optymalnych obszarów walutowych i synchronizacji cykli koniunkturalnych. Punkt pierwszy zawiera także opis źródeł danych. Punkt drugi przedstawia szczegóły bayesowskiego łączenia wiedzy po modelach (BMA) oraz miar łączności, które zostaną zaaplikowane do danych przedstawionych w punkcie pierwszym, w drugiej części artykułu. Pierwszą część artykułu kończy krótkie podsumowanie.

1. ZMIENNE I ŹRÓDŁA DANYCH

W badaniu wykorzystano dane za okres 1990–2007 opisujące dwadzieścia krajów Unii Europejskiej: Austria, Belgia, Cypr, Dania, Finlandia, Francja, Niemcy, Grecja, Węgry, Irlandia, Włochy, Luksemburg, Malta, Holandia, Polska, Portugalia, Słowacja, Hiszpania, Szwecja oraz Wielka Brytania.

W celu konstrukcji miary synchronizacji cykli koniunkturalnych (SCK) wykorzystano roczne szeregi czasowe realnego PKB obejmujące okres od roku 1987 do roku 2010 pochodzące z Penn World Table¹². Do szeregów zaaplikowano filtr pasmo-przepustowy Baxter-Kinga¹³. Przy specyfikacji filtru wykorzystano trzy wyprzedzenia i opóźnienia ($K = 3$), oraz zdefiniowano komponent cykliczny jako tę część szeregu czasowego, która charakteryzuje się amplitudą wahań pomiędzy dwoma ($p = 2$) a ośmioma ($q = 8$) latami¹⁴. Rezultatem filtracji było w przypadku każdego z krajów otrzymanie dwóch szeregów dla okresu 1990–2007. Są to: szereg komponentów cyklicznych:

¹² A. Heston, R. Summers, B. Aten, *Penn World Table Version 7.1*, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania.

¹³ M. Baxter, R. King, *Measuring Business cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*, „The Review of Economics and Statistics”, Tom 81, Nr 4, 1999, s. 575–593.

¹⁴ Więcej na ten temat można znaleźć w K. Beck, *Zastosowanie filtrów do analizy cykli koniunkturalnych i synchronizacji cyklu koniunkturalnego Polski z krajami europejskimi*, „Wiadomości Statystyczne” 2017 nr 667(10), s. 5–18 oraz K. Beck, *Spectral analysis and the Application of filters in the examination of business cycles*, „Myśl Ekonomiczna i Polityczna” 2017 nr 3(58), s. 40–65.

$$Y_{Ct} = Y_{C1990}, Y_{C1991}, \dots, Y_{C2007}, \quad (1)$$

oraz szereg czasowy trendu:

$$Y_{Nt} = Y_{N1990}, Y_{N1991}, \dots, Y_{N2007}. \quad (2)$$

Szeregi te definiują odchylenie względne PKB od trendu:

$$dev_t = \frac{Y_{Ct}}{Y_{Nt}} = \frac{Y_{C1990}}{Y_{N1990}}, \frac{Y_{C1991}}{Y_{N1991}}, \dots, \frac{Y_{C2007}}{Y_{N2007}}. \quad (3)$$

Miara (3) ma kilka zalet. Po pierwsze, normalizuje szeregi pomiędzy krajami. Po drugie, odchylenia PKB od trendu są wyrażone w procentach, więc mają prostą i klarowną interpretację. Interpretacja ta jest szczególnie ważna w kontekście polityki pieniężnej – gdy bank centralny wie o ile procent PKB jest powyżej/poniżej trendu, może sformułować odpowiednią regułę decyzyjną. Skuteczność implementacji jednolitej polityki pieniężnej zależy przy tym od względnego odchylenia od trendu w poszczególnych krajach. Po trzecie zmienna dev_t uwzględnia zmiany w trendzie.

Z tych względów dalszym analizom poddano szeregi odchyleń względnych dla 20 krajów Unii Europejskiej biorących udział w badaniu. Można z ich udziałem utworzyć $\frac{n(n-1)}{2} = 190$ niepowtarzających się par krajów. Dla każdej pary krajów i oraz j policzono współczynnik korelacji odchyleń z wykorzystaniem filtru Baxter-Kinga:

$$bp_{ij} = r(dev_{it}, dev_{jt}). \quad (4)$$

Wyżej wymienione współczynniki korelacji będą w dalszej analizie stanowić miarę stopnia synchronizacji cykli koniunkturalnych dla danej pary krajów. Miara ta przyjmuje wartości z przedziału od -1 do 1, gdzie 1 oznacza pełną synchronizację cykli koniunkturalnych, -1: kompletną desynchronizację, zaś wartość zero świadczy o braku jakiegokolwiek synchronizacji. Współczynnik korelacji to najpopularniejsza miara SCK, która była wykorzystana w niemal wszystkich badaniach przytoczonych we wprowadzeniu.

Następnie na podstawie teorii i empirii optymalnych obszarów walutowych skonstruowano miary regresory mające reprezentować potencjalne determinanty synchronizacji cykli koniunkturalnych. Pojawiają się także dwie nowe zmienne, które nie zostały wykorzystane we wcześniejszych badaniach.

Pierwszą z nich jest stopień synchronizacji cykli koniunkturalnych ze Stanami Zjednoczonymi, natomiast drugą – dystans PKB *per capita*.

Pierwszą analizowaną determinantą SCK jest podobieństwo struktur gospodarczych. W badaniu zastosowano dwa rodzaje miar podobieństwa struktur. Pierwszą jest średnia wartość współczynnika korelacji wartości dodanej w poszczególnych sektorach gospodarki dla pary krajów i oraz j dla okresu 1990–2007:

$$kor_{ij}^v = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\text{cov}(v_{it}^l, v_{jt}^l)}{s(v_{it}^l) * s(v_{jt}^l)}, \quad (5)$$

gdzie:

v_{it}^l – wartość dodana w sektorze l wyrażona jako procent wartości dodanej w całej gospodarce kraju i w okresie t ,

v_{jt}^l – wartość dodana w sektorze l wyrażona jako procent wartości dodanej w całej gospodarce kraju j w okresie t ,

cov – kowariancja,

s – odchylenie standardowe.

Zatem miara jest średnią wartością współczynnika korelacji struktur za lata 1990–2007. Analogiczna miara jest konstruowana dla udziałów zatrudnienia w poszczególnych sektorach w zatrudnieniu ogółem (e), dla danej pary krajów. Z definicji (5) przyjmuje wartości od -1 do 1 , gdzie 1 oznacza istnienie identycznych struktur w obydwu krajach.

Drugą miarą podobieństwa struktur wykorzystaną w badaniu jest obliczony dla par krajów indeks specjalizacji Krugmana¹⁵ (*Krugman Specialization Index*) – ksi – dla okresu 1990–2007:

$$ksi_{ij}^v = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_l^L |v_{it}^l - v_{jt}^l|, \quad (6)$$

gdzie:

L – liczba sektorów w gospodarce.

Pozostałe oznaczenia są analogiczne do (5). Miara przyjmuje wartości z przedziału $[0, 2]$, gdzie 0 oznacza identyczne struktury w obydwu państwach, natomiast 2 oznacza kompletną rozbieżność struktur dla wybranej pary krajów. W celu sprawdzenia odporności modelu, współczynniki korelacji struktur (oraz ksi) zostały policzone dla trzech różnych poziomów dezagre-

¹⁵ P. Krugman, *Geography and Trade*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

gacji. W pierwszym przypadku dokonano podziału na trzy sektory: podstawowy: A + B, przemysłowy: C + D + E + F oraz związany z usługami: G + H + I + J + K + L + M + N + O + P + Q. Następnie dokonano podziału ze względu na kategorie jednocyfrowe: A – rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo; B – rybołówstwo; C – kopalnictwo i zbieractwo; D – przemysł tradycyjny; E – elektryczność, gaz i dostawa wody; F – budownictwo; G – sprzedaż; H – hotelarstwo i gastronomia; I – transport, przechowanie i komunikacja; J – pośrednictwo finansowe; K – nieruchomości i usługi biznesowe; L – administracja publiczna, obrona narodowa i ubezpieczenia społeczne; M – edukacja; N – służba zdrowia i pomoc socjalna; O – pozostałe usługi społeczne i prywatne; P – osoby zatrudnione w gospodarstwach domowych¹⁶. Ostatecznie w ramach kategorii jednocyfrowych dokonano dezagregacji na kategorie dwucyfrowe¹⁷, co oznacza podział gospodarki na 93 sektory. Dane na temat struktur produkcji pochodzą z bazy danych EU KLEMS i obejmują okres 1990–2007, skąd pochodzą również wprowadzone powyżej oznaczenia. W pracy ze względu na duży zakres materiału zaprezentowano jedynie obliczenia wykonane przy podziale gospodarki na 3 sektory dla wartości dodanej z wykorzystaniem współczynnika specjalizacji Krugmana (*ksiIv*) oraz przy podziale gospodarki na 93 sektory dla struktur zatrudnienia z wykorzystaniem współczynnika korelacji (*kor3e*)¹⁸.

Kolejną determinantą synchronizacji cykli koniunkturalnych jest natężenie bilateralnego handlu międzynarodowego. Wykorzystana w analizie miara jest zdefiniowana jako średni (w okresie 1990–2007) łączny udział handlu między dwoma krajami w sumie PKB tych krajów:

$$x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{Import_{ijt} + Eksport_{ijt}}{PKB_{it} + PKB_{jt}}. \quad (7)$$

Im wyższa wartość miary tym większe natężenie handlu pomiędzy krajami *i* oraz *j*. Dane na temat bilateralnego handlu międzynarodowego pochodzą z IMF Directions of Trade i obejmują okres 1990–2007.

¹⁶ W tym przypadku nie wykorzystano ostatniej kategorii – Q (ponadnarodowe organizacje) – gdyż dla wszystkich krajów w całym badanym okresie wartość tej rubryki wynosiła zero.

¹⁷ Podział ten jest niezmiernie obszerny, dlatego nie został tutaj szczegółowo omówiony. Zainteresowany czytelnik znajdzie wyczerpujące informacje na stronie: <http://euklems.net/> (13.05.2015).

¹⁸ Wszystkie pozostałe kombinacje miar, poziomów dezagregacji i kategorii są dostępne na życzenie czytelnika.

Kolejna z analizowanych zmiennych wyraża, w jakim stopniu realne PKB pary krajów są zsynchronizowane z realnym PKB Stanów Zjednoczonych. W celu jej wyznaczenia najpierw nałożono filtr Baxter-Kinga na roczne szeregi czasowe realnego PKB USA za lata 1987–2010. Analogicznie do miary synchronizacji cykli koniunkturalnych wewnątrz Unii Europejskiej przyjęto następujące parametry filtru: $K = 3$, $p = 2$ oraz $q = 8$. Następnie obliczono współczynnik korelacji dla komponentu cyklicznego PKB USA z wszystkimi krajami Unii Europejskiej¹⁹:

$$ubp_i = cor(y_i^t, y_{US}^t). \quad (8)$$

Ostatecznie, aby ustalić, jak synchronizacja cykli koniunkturalnych krajów Unii Europejskiej z USA wpływa na synchronizację pomiędzy danymi dwoma gospodarkami UE, obliczona została miara:

$$ubp_{ij} = ubp_i + ubp_j. \quad (9)$$

Dane na temat realnego PKB USA w latach 1987–2010 pochodzą z Penn World Table. Miara uwzględnia jedynie szeregi po filtracji, obejmuje zatem jedynie okres 1990–2007 i przyjmuje wartości z przedziału $[-2, 2]$, gdzie 2 oznacza doskonałą synchronizację cykli kraju i , kraju j oraz USA.

Wpływ kompatybilności polityki fiskalnej na synchronizację cykli koniunkturalnych został zmierzony przy użyciu współczynnika korelacji pozycji budżetowych wyrażonych jako procent PKB:

$$bd_{ij} = cor(def_i^t, def_j^t), \quad (10)$$

gdzie:

def_i^t i def_j^t – szeregi deficytów budżetowych wyrażonych jako procent PKB odpowiednio kraju i oraz j .

Dane na temat deficytu budżetowego pochodzą z bazy Eurostatu.

W celu skwantyfikowania wpływu różnic w polityce pieniężnej na SCK wykorzystano współczynnik korelacji stóp inflacji dla każdej pary krajów Unii Europejskiej w latach 1990–2007:

$$i1_{ij} = cor(i_i^t, i_j^t). \quad (11)$$

¹⁹ Tutaj oraz w dalszej części tego podrozdziału superskrypt t oznacza szereg czasowy, a nie jego konkretną wartość.

Inflacja w obu krajach jest mierzona metodą G-K. Dane na temat stóp inflacji pochodzą z Penn World Table. Szczegółowy opis metod zob.: Feenstra, Inklaar, Timmer²⁰.

Dla zbadania wpływu konwergencji na SCK wykorzystano średnią wartość absolutną różnicy logarytmów naturalnych realnych PKB *per capita* dla każdej pary krajów w okresie 1990–2007:

$$dif_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\ln(GDPpercapita_{it}) - \ln(GDPpercapita_{jt})|. \quad (12)$$

Dane na temat GDP *per capita* pochodzą z Penn World Table.

Ponadto w modelu wykorzystano zmienne binarne w celu odzwierciedlenia wpływu przynależności do Unii Europejskiej oraz Unii Gospodarczej i Walutowej na stopień synchronizacji cykli koniunkturalnych. Dla przynależności do unii walutowej zmienna ta przyjmuje wartość 1 w przypadku, gdy w danym roku obydwa kraje były członkami strefy euro oraz 0 dla pozostałych lat. Następnie oblicza się średnią dla całego okresu, co formalnie można zapisać jako:

$$mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \begin{array}{l} 1 - \text{w roku } t \text{ oba kraje były członkami unii walutowej} \\ 0 - \text{w pozostałych przypadkach} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Analogiczną konstrukcję przyjęto dla członkostwa w Unii Europejskiej:

$$eu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \begin{array}{l} 1 - \text{w roku } t \text{ oba kraje były członkami unii walutowej} \\ 0 - \text{w pozostałych przypadkach} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Jako standardową zmienną kontrolną wykorzystano miarę ukazującą średnią wartość iloczynu realnych PKB dwóch gospodarek Unii Europejskiej w latach 1990–2007:

$$rp_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{it} * Y_{jt}. \quad (15)$$

²⁰ R. Feenstra, R. Inklaar, M. Timmer, *The Next Generation of the Penn World Table*, 2013, available for download at www.ggd.net/pwt.

W analogiczny sposób skonstruowano zmienną grawitacyjną obrazującą iloczyn populacji dwóch krajów Unii Europejskiej w okresie 1990–2007:

$$pp_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T pop_{it} * pop_{jt}, \quad (16)$$

gdzie:

pop_{it} oraz pop_{jt} – wielkość populacji odpowiednio kraju i oraz j w okresie t .
Dane na temat wielkości populacji i realnego PKB pochodzą z Penn World Table.

Ponadto w charakterze zmiennych kontrolnych użyto dwie dodatkowe zmienne binarne. Są to: b – zmienna zerojedynkowa przyjmująca wartość 1, gdy dwa kraje posiadają wspólną granicę, oraz l – zmienna binarna przyjmująca wartość 1 w przypadku, gdy dana para krajów ma co najmniej jeden wspólny język urzędowy. Ostatnią zmienną kontrolną jest d – miara ukazująca najkrótsze lądowe połączenie komunikacyjne między stolicami dwóch danych państw Unii Europejskiej, zgodnie ze wskazówkami Google Maps.

2. BMA – BAYESOWSKIE ŁĄCZENIE WIEDZY PO MODELACH

W celu sprawdzenia, które spośród opisanych powyżej zmiennych są odpornymi na zmianę specyfikacji determinantami synchronizacji cykli koniunkturalnych wykorzystano BMA (*Bayesian model averaging*) – bayesowskie łączenie wiedzy po modelach. Niniejszy punkt opisuje zarówno BMA, jak i miary łączności (*jointness*), które można obliczyć w ramach BMA. Wiodąca publikacja na temat aplikacji BMA została opracowana przez Hoeting, Madigana, Rafteryego oraz Volinskyego²¹, natomiast na temat wykorzystania BMA w środowisku R przez Rafteryego, Painterera oraz Volinskyego²². Ponadto szczegółowy opis BMA i miar łączności oraz ich zastosowania został opisany przez Becka²³.

²¹ J. Hoeting, D. Madigan, A. Raftery, C. Volinsky, *Bayesian Model Averaging: A Tutorial*, „Statistical Science”, Tom 14, Nr 4, 1999, s. 382–417.

²² A.E. Raftery, I. Painter, C.T. Volinsky, *BMA: An R package for Bayesian Model Averaging*, „R News” Tom 5, Nr 2, 2005, s. 2–8.

²³ K. Beck, *Bayesian Model Averaging and Jointness Measures: Theoretical Framework and Application to the Gravity Model of Trade*, „Statistics in Transition”, Tom 18, Nr 3, 2017, s. 393–412.

BMA zakłada następującą ogólną postać modelu:

$$y_j = \alpha_j + \beta_j X_j + \varepsilon_j, \quad (17)$$

gdzie:

j ($j = 1, 2, \dots, m$) – numer modelu,

y_j – wektor wartości zmiennej zależnej,

α_j jest wektorem wyrazów wolnych, β_j jest wektorem nieznanych parametrów,

X_j – macierz zmiennych objaśniających,

ε_j – wektor niezależnych i pochodzących z rozkładu normalnego reszt $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$, które są warunkowo homoskedastyczne.

Ponadto każdemu z modeli M_j przypisany jest binarny wektor ($k \times 1$) $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$, gdzie zero oznacza, że dany regressor nie występuje w modelu, jeden zaś, iż zmienna występuje w modelu, natomiast K oznacza całkowitą liczbę potencjalnych regresorów.

W przypadku K regresorów przestrzeń możliwych modeli składa się z 2^K wariantów²⁴, co stwarza poważne problemy analityczne, gdy K jest wysokie (np. $2^{18} = 262144$ czy $2^{16} = 65536$) ze względu na ograniczone moce obliczeniowe (w szczególności pamięć RAM) współczesnych komputerów osobistych. Z tego względu autorzy sugerują metody wyboru modeli najlepszych i wnioskowanie jedynie na ich podstawie.

Istnieje kilka alternatywnych strategii redukcji ogólnej liczby modeli do wariantów najlepszych. Madigan i Raftery²⁵ proponują metodę okna Okama, w której następuje odrzucanie modeli gorszych oraz zachowywanie modeli o mniejszych rozmiarach spośród tych o podobnej pojemności informacyjnej. Madigan, Raftery, Volinsky i Kronmal²⁶ do wyszukiwania najlepszych modeli wykorzystują algorytm *leaps and bound*, opracowany przez Furnivala i Wilsona²⁷. Jednak najbardziej popularną metodą radzenia sobie ze zbyt obszerną przestrzenią modeli stało się MC³ (*Markov Chain Monte Carlo Model Com-*

²⁴ W analizie brany jest pod uwagę także model zawierający jedynie stałą przez co od wyrażenia 2^K nie odejmujemy 1.

²⁵ D. Madigan, A.E. Raftery, *Model selection and accounting for model uncertainty in Graphical models using Okam's widow*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 89, Nr 428, 1994, s. 1535–1546.

²⁶ D. Madigan, A.E. Raftery, C. Volinsky, R. Kronmal, *Bayesian model averaging in proportional hazard models: assessing the risk of a stroke*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)”, Tom 46, Nr 4, 1997, s. 433–448.

²⁷ G.M. Furnival, R.W. Jr. Wilson, *Regression by leaps and bounds*, „Technometrics”, Tom 16, Nr 4, 1974, s. 499–511.

position) zaproponowane przez Madigana, Yorka oraz Allarda²⁸ i to pomimo problemów z konwergencją do rzeczywistych prawdopodobieństw *a posteriori* modeli²⁹. Spośród omawianych metod redukcji na uwagę zasługuje również metoda SSVS (*stochastic search variable selection*) zaproponowana przez Georgea oraz McCullocha³⁰.

Dla przestrzeni wszystkich modeli bezwarunkowy rozkład *a posteriori* współczynnika kierunkowego β jest dany przez:

$$P(\beta|y) = \sum_{j=1}^{2^k} P(\beta|M_j,y) * P(M_j|y), \quad (18)$$

gdzie:

$P(\beta|M_j,y)$ – warunkowy rozkład współczynnika β dla danego modelu M_j ,

$P(M_j|y)$ – prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu.

Korzystając z twierdzenia Bayesa prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu (PMP – *posterior model probability*) $P(M_j|y)$ można wyrazić jako:

$$PMP = p(M_j|y) = \frac{l(y|M_j) * p(M_j)}{p(y)}, \quad (19)$$

przy czym najczęściej korzysta się z proporcjonalności prawdopodobieństwa *a posteriori* modelu do iloczynu $l(y|M_j)$ – specyficznej dla danego modelu krańcowej wartości funkcji wiarygodności; oraz $P(M_j)$ – prawdopodobieństwa *a priori* modelu, co można zapisać jako:

$$P(M_j|y) \propto l(y|M_j) * P(M_j). \quad (20)$$

Ponadto, ponieważ:

$$P(y) = \sum_{j=1}^{2^k} l(y|M_j) * P(M_j), \quad (21)$$

²⁸ D. Madigan, J. York, D. Allard, *Bayesian Graphical Models for Discrete Data*, „International Statistical Review”, Tom 63, Nr 2, 1995, s. 215–223.

²⁹ A.E. Raftery, D. Madigan, J.A. Hoeting, *Bayesian model averaging for linear regression models*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 92, Nr 437, 1997, s. 179–191.

³⁰ E. George, R. McCulloch, *Variable Selection Via Gibbs Sampling*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 88, Nr 423, 1993, s. 881–889.

wagi poszczególnych modeli mogą być przekształcone w prawdopodobieństwa poprzez normalizację względem przestrzeni wszystkich 2^K modeli:

$$P(M_i|y) = \frac{l(y|M_i) * P(M_i)}{\sum_{j=1}^{2^K} l(y|M_j) * P(M_j)}. \quad (22)$$

Zastosowanie BMA wymaga sprecyzowania struktury modelu *a priori*. Wartości współczynników kierunkowych β charakteryzuje rozkład normalny o średniej zero oraz wariancji $\sigma^2 V_{oj}$, a więc:

$$P(\beta|\sigma^2, M_j) \sim N(0, \sigma^2 V_{oj}). \quad (23)$$

Zakłada się, że macierz wariancji *a priori* V_{oj} jest proporcjonalna do kowariancji w próbie:

$$V_{oj} = (g_0 X_j' X_j)^{-1}, \quad (24)$$

gdzie: g_0 jest współczynnikiem proporcjonalności. Parametr g *a priori* został zaproponowany przez Zellnera³¹ i jest powszechnie stosowane w aplikacjach BMA. Najczęściej cytowaną pracą na temat wyboru parametru g Zellnera jest artykuł Fernández, Leya oraz Steela³². Autorzy testowali dziewięć następujących propozycji wyznaczenia parametru g :

a) $g_0 = 1/n$, (24)

w tym przypadku zakłada się, że dodatkowa obserwacja niesie jedną jednostkę informacji na temat wartości współczynnika β . Ta konstrukcja g nosi nazwę jednostkowej informacji *a priori*³³ (UIP – *unit information priori*);

b) $g_0 = k_j/n$, (25)

w przypadku tej propozycji parametru g , informacja *a priori* zawarta w jednej obserwacji jest proporcjonalna do liczby regresorów;

³¹ A. Zellner, *On Assessing Prior Distributions and Bayesian Regression Analysis with g Prior Distributions*, [w:] (red.) P.K. Goel, A. Zellner, *Bayesian Inference and Decision Techniques: Essays in Honor of Bruno de Finetti. Studies in Bayesian Econometrics* 6, Elsevier, New York 1986, s. 233–243.

³² D. Foster, E. George, *The Risk Inflation Criterion for Multiple Regression*, „The Annals of Statistics”, Tom 22, Nr 4, 1994, s. 1947–1975.

³³ R. Kass, L. Wasserman, *A Reference Bayesian Test for Nested Hypotheses and Its Relationship to the Schwarz Criterion*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 90, Nr 431, 1995, s. 928–934.

$$c) \quad g_0 = \left[k_j^{\frac{1}{j}} \right] / n, \quad (26)$$

czyli pojemność informacji *a priori* spada wraz ze wzrostem liczby regresorów;

$$d) \quad g_0 = \sqrt{1/n}, \quad (27)$$

czyli pojemność informacji *a priori* rośnie wraz ze wzrostem próby, jednak wolniej niż miało to miejsce w przypadku UIP – a);

$$e) \quad g_0 = \sqrt{k_j/n}, \quad (28)$$

wówczas parametr g dopuszcza mniejszą informację *a priori* niż w przypadku struktury b);

$$f) \quad g_0 = 1/[\ln(n)]^3, \quad (29)$$

w tym przypadku parametr *a priori* zachowuje się jak kryterium informacyjne Hannan-Quinna;

$$g) \quad g_0 = \frac{\ln(k_j + 1)}{[\ln(n)]}, \quad (30)$$

przy tej strukturze parametr g kurczy się wraz ze wzrostem próby wolniej niż w przypadku f), jednak wciąż zachowuje się podobnie do kryterium Hannan-Quinn;

$$h) \quad \varrho_n = \delta \omega^{\frac{1}{k_j}} / \left(1 - \omega^{\frac{1}{k_j}} \right), \quad (31)$$

ta naturalnie sprzężona *a priori* struktura została zaprezentowana przez Lauda oraz Ibrahima³⁴;

$$i) \quad g_0 = 1/k^2, \quad (32)$$

w tym przypadku parametr g jest zbieżny do kryterium ryzyka inflacji informacji³⁵ (RIC – *risk inflation criterion*).

Wyniki badań skłoniły Fernández, Leya oraz Steela to zaproponowania następującej reguły, odnośnie do wyboru najlepszego parametru g *a priori*:

$$g_0 = \frac{2}{\max(n, k^2)}. \quad (33)$$

Do innych powszechnie stosowanych wartości parametru g Zellnera należy empiryczne bayesowskie g (BRIC – *Empirical Bayes* g):

$$g_0 = \max(0, F_j - 1), \quad (34)$$

³⁴ P. Laud, J. Ibrahim, *Predictive specification of prior model probabilities in variable selection*, „Biometrika”, Tom 83, Nr 2, 1996, s. 267–274.

³⁵ D. Foster, E. George, *The Risk Inflation...*, *op. cit.*, 1947–1975.

zaproponowane przez Georga i Fostera³⁶, gdzie:

$$F_j \equiv \frac{R_j^2(N-1-k_j)}{(1-R_j^2)k_j}, \quad (35)$$

przy czym: R_j^2 jest wartością współczynnika determinacji dla j -tego modelu estymowanego MNK. Narusza to poniekąd zasady wnioskowania bayesowskiego, gdyż wykorzystanie R^2 do predykcji poprzedza wnioskowanie³⁷. Z drugiej strony ma swoją zaletę polegającą na uwzględnianiu bieżącej informacji w trakcie badania.

Liang, Paula, Molina, Clydea i Bergera³⁸ zaproponowali hiper g (*hyper g prior*), gdzie współczynnik kurczenia się (*shrinkage factor*) postaci $\frac{g_0}{1+g_0}$ jest dany rozkładem Beta:

$$\frac{g_0}{1+g_0} \sim \text{Beta}\left(1, \frac{\alpha}{2} - 1\right), \quad (36)$$

gdzie: α jest parametrem z przedziału (2, 4]. Gdy wartość parametru $\alpha \rightarrow 2$, to $g_0 \rightarrow \infty$, a im większe g tym większa jest niepewność badacza odnośnie do tego, czy wartość badanego parametru strukturalnego jest różna od zera.

W aplikacji BMA oprócz specyfikacji parametru g , konieczne jest określenie rozkładu *a priori* rozmiarów modelu, przy czym możliwe jest stosowanie rozkładów nieinformacyjnych oraz informacyjnych. Powszechnie stosowanym rozkładem nieinformacyjnym jest jednostajna (*uniform*) funkcja gęstości *a priori*, która każdemu modelowi przypisuje takie samo prawdopodobieństwo. Koncentracja masy prawdopodobieństwa *a priori* występuje wówczas wokół modeli średnich rozmiarów, a oczekiwany rozmiar modelu *a priori* (Em) wynosi $K/2$. Prawdopodobieństwo włączenia zmiennej do modelu *a priori* (AIP – *prior inclusion probability*) wynosi $(K/2)/K = 0,5$.

Kolejną powszechnie stosowaną funkcją gęstości jest rozkład dwumianowy, gdzie prawdopodobieństwo *a priori* modelu jest proporcjonalne do następującego wyrażenia:

³⁶ D. Foster, E. George, *Calibration and empirical Bayes variable selection*, „Biometrika”, Tom 87, Nr 4, 2000, s. 731–747.

³⁷ Innymi słowy jest to „spoglądanie na dane przed wnioskowaniem” w celu specyfikacji prawdopodobieństwa *a priori*.

³⁸ F. Liang, R. Paulo, G. Molina, M. Clyde, J. Berger, *Mixture of g Priors for Bayesian Variable Selection*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 103, 2008, s. 410–423.

$$P(M_j) \propto \left(\frac{Em}{K}\right)^{k_j} * \left(1 - \frac{Em}{K}\right)^{K-k_j}, \quad (37)$$

przy czym gdy $Em = K/2$ rozkład staje się rozkładem jednostajnym. Od badacza zależy ustalenie Em , przez co może on włączyć posiadane przez siebie informacje *a priori* w celu ustalenia oczekiwanych rozmiarów modelu.

Kolejnym przykładem rozkładu prawdopodobieństwa *a priori* rozmiarów modelu jest rozkład beta-dwumianowy³⁹ o oczekiwanych rozmiarach równych $K/2$:

$$P(M_j) \propto \Gamma(1 + k_j) * \Gamma\left(\frac{K - Em}{Em} + K - k_j\right). \quad (38)$$

W przypadku rozkładu beta-dwumianowego o oczekiwanych rozmiarach $K/2$ prawdopodobieństwo modelu każdego rozmiaru jest takie samo. Prawdopodobieństwo *a priori* włączenia zmiennej do modelu wynosi zatem 0,5.

Postać krańcowej funkcji wiarygodności jak i prawdopodobieństwa modelu *a posteriori* są uzależnione od wyboru postaci parametru g oraz rozkładu *a priori* rozmiarów modelu. Na przykład dla dwumianowego rozkładu *a priori* rozmiarów modelu krańcowa wiarygodność modelu jest dana przez:

$$P(M_j) \propto N^{-\frac{k_j}{2}} * SEE_j^{-\frac{N}{2}}, \quad (39)$$

gdzie:

N – liczba obserwacji,

k_j – liczba regresorów

natomiast:

$$SSE_j = (y - X_j\beta)'(y - X_j\beta) \quad (40)$$

jest sumą kwadratów błędów modelu M_j .

Prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu jest dane przez:

$$P(M_j | y) = \frac{N^{-\frac{k_j}{2}} * SEE_j^{-\frac{N}{2}} * P(M_j)}{\sum_{j=1}^{2^K} \left[N^{-\frac{k_j}{2}} * SEE_j^{-\frac{N}{2}} * P(M_j) \right]}. \quad (41)$$

³⁹ E. Ley, M. Steel, *On the Effect of Prior Assumptions in Bayesian Model Averaging with Applications to Growth Regressions*, „Journal of Applied Econometrics”, Tom 24, Nr 4, 2009, s. 651–674.

Używając prawdopodobieństw *a posteriori* modeli w roli wag, można obliczyć bezwarunkową średnią oraz odchylenie standardowe *a posteriori* dla parametru strukturalnego β_i . Średnia *a posteriori* (PM – *posteriori mean*) parametru β_i , niezależna od przestrzeni modeli, jest wówczas dana następującym wzorem:

$$PM = E(\beta_i | y) = \sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * \hat{\beta}_{ij}, \quad (42)$$

gdzie: $\hat{\beta}_{ij} = E(\beta_i | y, M_j)$ jest wartością oszacowania parametru β_i przy użyciu MNK oraz parametru g Zellnera dla modelu M_j . Odchylenie standardowe *a posteriori* (PSD – *posterior standard deviation*) równe jest:

$$\begin{aligned} PSD &= \sqrt{V(\beta_i | y)} = \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * V(\beta_j | y, M_j) + \sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * [\hat{\beta}_{ij} - E(\beta_i | y, M_j)]^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

gdzie: $V(\beta_j | y, M_j)$ oznacza warunkową wariancję parametru dla modelu M_j .

Najważniejszą statystyką w BMA jest prawdopodobieństwo *a posteriori* włączenia zmiennej do modelu (PIP – *posteriori inclusion probability*). PIP dla regresora x_i równe jest:

$$P(x_i | y) = \sum_{j=1}^{2^K} I(\varphi_i = 1 | y, M_j) * P(M_j | y), \quad (44)$$

gdzie: $\varphi_i = 1$ oznacza włączenie do modelu zmiennej x_i .

PM oraz PSD są obliczane dla wszystkich modeli, nawet dla tych, w których wartość $\varphi_i = 0$, czyli zmienna, nie występuje. Z tego względu badacz może być zainteresowany wartością parametru strukturalnego w modelach, w których występuje dana zmienna. W tym celu można obliczyć wartość warunkowej średniej *a posteriori* (PMC – *conditional posterior mean*), czyli średniej *a posteriori* pod warunkiem włączenia zmiennej do modelu:

$$PMC = E(\beta_i | \varphi_i = 1 | y) = \frac{E(\beta_i | y)}{P(x_i | y)} = \frac{\sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * \hat{\beta}_{ij}}{P(x_i | y)}, \quad (45)$$

przy czym warunkowe odchylenie standardowe (PSDC – *conditional posterior standard deviation*) jest dane przez:

$$\begin{aligned} PSDC &= \sqrt{V(\beta_i | \varphi_i = 1 | y)} = \\ &= \sqrt{\frac{V(\beta_i | y) + [E(\beta_i | y)]^2}{P(x_i | y)} - [E(\beta_i | \varphi_i = 1 | y)]^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

W celu porównania siły wpływu poszczególnych regresorów na zmienną objaśnianą, należy dokonać standaryzacji poprzez podzielenie średniej *a posteriori* przez odchylenie standardowe *a posteriori*. Wystandaryzowana wartość średniej *a posteriori* (SPM – *standardized posteriori mean*) dana jest zatem wzorem:

$$SPM = E\left(\frac{\beta_i}{SD_i}, y\right) = \sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * \hat{\beta}_{ij}. \quad (47)$$

Natomiast standaryzowana wartość średniej *a posteriori* pod warunkiem włączenia zmiennej do modelu (SPMC – *standardized conditional posteriori mean*) jest następująca:

$$SPMC = E\left(\frac{\beta_i}{SD_i} | \varphi_i = 1, y\right) = \frac{E(\beta_i | \varphi_i = 1 | y)}{\sqrt{V(\beta_i | \varphi_i = 1 | y)}}. \quad (48)$$

Dodatkowo badacz może być zainteresowany znakiem oszacowania parametru zmiennej, gdy jest ona włączana do modelu. Prawdopodobieństwo *a posteriori* pozytywnego znaku współczynnika w modelu [P(+)] wyznaczone jest następująco:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * CDF(t_{ij} | M_j), \quad \text{gdy } \text{sign}[E(\beta_i | y)] = 1 \\ P(+) &= P[\text{sign}(x_i) | y] = \\ &1 - \sum_{j=1}^{2^K} P(M_j | y) * CDF(t_{ij} | M_j), \quad \text{gdy } \text{sign}[E(\beta_i | y)] = -1 \end{aligned} \quad (49)$$

gdzie: CDF (*cumulative distribution function*) oznacza dystrybuantę rozkładu, natomiast $t_{ij} \equiv (\hat{\beta}_i / \widehat{SD}_i | M_j)$.

3. MIARY ŁĄCZNOŚCI

Wszystkie przytoczone do tej pory statystyki miały na celu opis wpływu regresorów na zmienną objaśnianą. Badacz powinien być jednak także zainteresowany związkami, jakie zachodzą pomiędzy zmiennymi objaśniającymi. W tym celu można wykorzystać miarę zależności między regresorami, która jest określana mianem łączności (*J – jointness*).

Miary łączności zostały w tym samym czasie zaproponowane przez dwa zespoły badaczy. Jako pierwszy opublikowany został artykuł Leya oraz Steela⁴⁰, jednak w niniejszej pracy w pierwszej kolejności przedstawiona zostanie koncepcja Doppelhofera i Weeksa⁴¹, co wynika z faktu, że artykuł Leya i Steela⁴² jest w dużej części krytyką koncepcji Doppelhofera i Weeksa. Miary pozwalają na określenie związków substytucyjności oraz komplementarności pomiędzy zmiennymi objaśniającymi. Poniżej uwagę skoncentrowano jedynie na związkach łączności pomiędzy parami zmiennych. Należy jednak nadmienić, że możliwe jest także badanie związków między trójkami, czy też liczniejszymi zbiorami zmiennych.

Zdefiniujmy prawdopodobieństwa *a posteriori* dla modelu M_j jako:

$$P(M_j|y) = P(\varphi_1 = w_1, \varphi_2 = w_2, \dots, \varphi_K = w_K | y, M_j), \quad (50)$$

gdzie: w_i może przyjmować wartość 1 (gdy zmienna występuje w modelu) oraz zero, gdy zmienna nie występuje w modelu. W przypadku analizy dwóch zmiennych x_i oraz x_h łączne prawdopodobieństwo *a posteriori* włączenia dwóch zmiennych do modelu może być wyrażone następująco:

$$P(i \cap h | y) = \sum_{j=1}^{2^K} l(\varphi_i = 1 \cap \varphi_h = 1 | y, M_j) * P(M_j | y). \quad (51)$$

Można zatem powiedzieć, że $P(i \cap h | y)$ jest sumą prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli, gdzie występują zmienne oznaczone przez x_i oraz x_h .

⁴⁰ E. Ley, M. Steel, *Jointness in Bayesian variable selection with applications to growth regression*, „Journal of Macroeconomics”, Tom 29, Nr 3, 2007, s. 476–493.

⁴¹ G. Doppelhofer, M. Weeks, *Jointness of Growth Determinants*, „Journal of Applied Econometrics”, Tom 24, Nr 2, 2009, s. 209–244.

⁴² W tekście podano daty opublikowania ostatecznych wersji artykułów. Ley i Steel oraz Doppelhofer i Weeks pracowali nad swoimi miarami przez wiele lat, dzieląc się wynikami swojej pracy. Właśnie z tego powodu artykuł wydany wcześniej zawiera krytykę miar opisanych w tym wydanym później.

Doppelhofer oraz Weeks zauważają, że związki pomiędzy zmiennymi x_i i x_h mogą być poddane analizie poprzez porównanie prawdopodobieństw *a posteriori* włączenia do modelu tych zmiennych z osobna [$P(i|y)$ oraz $P(h|y)$] z prawdopodobieństwem włączenia i wyłączenia obu zmiennych jednocześnie. Autorzy uzasadniają swoje rozumowanie prezentując analizę przypadku losowego wektora (φ_i, φ_h) , o łącznym rozkładzie *a posteriori* $P(\varphi_i, \varphi_h|y)$. Punkty masy prawdopodobieństwa zdefiniowane na przestrzeni $\{0,1\}^2$ przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1.

Punkty masy prawdopodobieństwa zdefiniowane na przestrzeni $\{0,1\}^2$ dla łącznego rozkładu $P(\varphi_i, \varphi_h|y)$

| $P(\varphi_i, \varphi_h y)$ | $\varphi_h = 0$ | $\varphi_h = 1$ | Suma |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------|----------------|
| $\varphi_i = 0$ | $P(\bar{i} \cap \bar{h} y)$ | $P(\bar{i} \cap h y)$ | $P(\bar{i} y)$ |
| $\varphi_i = 1$ | $P(i \cap \bar{h} y)$ | $P(i \cap h y)$ | $P(i y)$ |
| Suma | $P(\bar{h} y)$ | $P(h y)$ | 1 |

Źródło: G. Doppelhofer, M. Weeks, *Jointness of Growth...*, *op. cit.*

Tabela 1 przedstawia prawdopodobieństwa związane z wszystkimi możliwymi realizacjami wektora (φ_i, φ_h) . Z tabeli łatwo odczytać, że krańcowe prawdopodobieństwo włączenia do modelu zmiennej x_i można obliczyć jako:

$$P(i|y) = P(i \cap h|y) + P(i \cap \bar{h}|y), \quad (52)$$

natomiast prawdopodobieństwo wyłączenia zmiennej x_i można wyrazić, jako:

$$P(\bar{i}|y) \equiv 1 - P(i|y) = P(\bar{i} \cap \bar{h}|y) + P(\bar{i} \cap h|y). \quad (53)$$

Jeżeli między zmiennymi x_i i x_h występuje współzależność to należy oczekiwać, że wyrażenia $P(i \cap h|y)$ oraz $P(\bar{i} \cap \bar{h}|y)$ będą przyjmować większe wartości niż wyrażenia $P(i \cap \bar{h}|y)$ oraz $P(\bar{i} \cap h|y)$. Autorzy na tej podstawie, za Whittakerem (1990), zauważają, że naturalną miarą zależności pomiędzy dwoma binarnymi zmiennymi losowymi φ_i oraz φ_h jest iloraz krzyżowego iloczynu (CPR – *cross-product ratio*), wyrażony jako:

$$CPR(i, h|y) = \frac{P(i \cap h|y)}{P(i \cap \bar{h}|y)} * \frac{P(\bar{i} \cap \bar{h}|y)}{P(\bar{i} \cap h|y)}. \quad (54)$$

Ponieważ realizacje wektora (φ_i, φ_h) dla każdej ze zmiennych mogą wynosić jedynie 1 lub 0, to $P(i \cap h|y)$ jest dwumianowym rozkładem łącznego prawdopodobieństwa *a posteriori*, który można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} P(\varphi_i, \varphi_h | y) &= P(i \cap h | y)^{\varphi_i \varphi_h} * P(i \cap \bar{h} | y)^{\varphi_i(1-\varphi_h)} * \\ &* P(\bar{i} \cap h | y)^{(1-\varphi_i)\varphi_h} * P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)^{(1-\varphi_i)(1-\varphi_h)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Zlogarytmowanie oraz uporządkowanie wyrażeń daje:

$$\begin{aligned} \ln[P(\varphi_i, \varphi_h | y)] &= \ln[P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)] + \varphi_h \ln \left[\frac{P(\bar{i} \cap h | y)}{P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)} \right] + \\ &+ \varphi_i \ln \left[\frac{P(i \cap \bar{h} | y)}{P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)} \right] + \varphi_i \varphi_h \ln \left[\frac{P(i \cap h)}{P(i \cap \bar{h} | y)} * \frac{P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)}{P(\bar{i} \cap h | y)} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Wystąpienie niezależności między zmiennymi x_i i x_h jest możliwe wtedy, i tylko wtedy, gdy $\ln[P(\varphi_i, \varphi_h | y)]$ jest addytywne dla $P(\varphi_i | y)$ oraz $P(\varphi_h | y)$. Niezależność może zatem zachodzić wtedy, i tylko wtedy, gdy logarytm naturalny CPR wynosi 0, co oznacza CPR równe 1.

Na tej podstawie Doppelhofer i Weeks wyprowadzają swoją miarę łączności, którą definiują jako:

$$\begin{aligned} J_{Dw(ih)} &= \ln[CPR(i, h | y)] = \ln \left[\frac{P(i \cap h | y)}{P(i \cap \bar{h} | y)} * \frac{P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)}{P(\bar{i} \cap h | y)} \right] = \\ &= \ln \left[\frac{P(i | h, y)}{P(\bar{i} | h, y)} * \frac{P(\bar{i} | \bar{h}, y)}{P(i | \bar{h}, y)} \right] = \ln[PO_{i|h} * PO_{i|\bar{h}}] \end{aligned} \quad (57)$$

Wyrażenie $\ln[PO_{i|h} * PO_{i|\bar{h}}]$ jest logarytmem naturalnym iloczynu dwóch ilorazów szans *a posteriori*, gdzie $PO_{i|h}$ oznacza szanse *a posteriori* włączenia do modelu zmiennej x_i pod warunkiem włączenia zmiennej x_h , natomiast $\ln[PO_{i|h} * PO_{i|\bar{h}}]$ oznacza szanse *a posteriori* wyłączenia z modelu zmiennej x_i pod warunkiem wyłączenia zmiennej x_h .

Warto zwrócić uwagę na fakt, że gdy iloczyn prawdopodobieństw włączenia i wyłączenia obu zmiennych $[P(i \cap h | y) * P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)]$ jest większy od iloczynu prawdopodobieństw włączenia każdej ze zmiennych z osobna $[P(i \cap \bar{h} | y) * P(\bar{i} \cap h | y)]$, to logarytm przyjmuje wartości dodatnie. Zatem dla dodatnich wartości miary musi występować związek komplementarności: największym prawdopodobieństwem charakteryzują się modele, które zawie-

rają obie zmienne jednocześnie lub obie zmienne jednocześnie odrzucają. Gdy iloczyn prawdopodobieństw włączenia zmiennych osobno jest wyższy od iloczynu włączenia obydwu lub żadnej z nich jednocześnie, logarytm przyjmuje wartości ujemne. W takiej sytuacji zachodzi zależność substytucyjna. Podsumowując, miara łączności Doppelhofera i Weeksa przyjmuje dodatnie wartości, gdy zachodzi związek komplementarności pomiędzy zmiennymi, natomiast wartości ujemne, gdy związek ten ma charakter substytucyjny.

Ley oraz Steel⁴³ postanowili skonstruować miarę łączności, która posiadałaby następujące cechy:

- 1) Interpretowalność – miara powinna mieć formalną statystyczną lub intuicyjną interpretację;
- 2) Skalibrowanie – wartości miary powinny być określone na klarownie zdefiniowanej skali opartej na formalnej statystycznej bądź intuicyjnej interpretacji;
- 3) Ekstremalna łączność – w sytuacji, gdy dwie zmienne pojawiają się we wszystkich analizowanych modelach razem (np. w przypadku wykorzystania metod MC³ lub w przypadku, gdy modele zawierające obydwie zmienne zbierają „lwią” część PMP), powinna występować ekstremalna wartość miary łączności;
- 4) Definiowalność – łączność powinna być zdefiniowana zawsze, gdy przynajmniej jedna z rozważanych zmiennych charakteryzuje się pozytywnym prawdopodobieństwem włączenia.

Ley and Steel stwierdzili, że miara łączności Doppelhofera i Weeksa jest wadliwa ponieważ jest niezdefiniowana w sytuacji, gdy obydwie regresory są włączone do wszystkich modeli oraz gdy jeden z regresorów nie jest uwzględniony w żadnym z modeli. Ponadto, gdy prawdopodobieństwo włączenia zmiennej do modelu dąży do 1, to wartość miary jest w znacznej części uzależniona od granicy wyrażenia $[P(\bar{i} \cap \bar{h} | y)]/[P(\bar{i} \cap h | y)]$. Oznacza to, że kilka modeli wyłączających zmienną x_i , charakteryzujących się bardzo niskim prawdopodobieństwem, może silnie wpłynąć na wartość miary: zarówno w kierunku 0 (gdy zawierają zmienną x_h), jak i ∞ (gdy nie zawierają zmiennej x_h). Zatem miara $J_{Dw}(ih)$ nie ma cech 1) oraz 4).

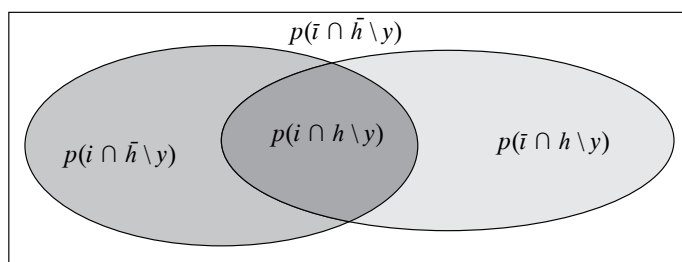
Ponadto autorzy zwracali uwagę, że interpretacja miary Doppelhofera i Weeksa jest niedostatecznie klarowna i z tego względu zaproponowali miarę alternatywną. Idea miary Leya oraz Steela została zaprezentowana na rysunku 1. Naturalną miarą łączności wydaje się po prostu $P(i \cap h | y)$, zaznaczone na rysunku kolorem najciemniejszym. Jednakże znaleźć można dwie lepsze

⁴³ E. Ley, M. Steel, 2007, *Jointness in Bayesian...*, *op. cit.*

miary łączności. Pierwszą z nich jest stosunek prawdopodobieństwa włączenia obydwu zmiennych do sumy prawdopodobieństw włączenia każdej z nich z osobna (zaznaczonych trzema odcieniami koloru szarego). Drugą miarą jest stosunek prawdopodobieństwa włączenia obydwu zmiennych jednocześnie do sumy prawdopodobieństw włączenia każdej ze zmiennych z osobna, z wyłączeniem prawdopodobieństwa włączenia obydwu zmiennych jednocześnie (zaznaczonych dwoma jaśniejszymi odcieniami koloru szarego).

Rysunek 1

Łączność (tytuł oryginalny „Jointness”)



Źródło: E. Ley, M. Steel, *Jointness in Bayesian...*, *op. cit.*

To właśnie ta ostatnia miara spełnia wszystkie kryteria wymienione przez autorów. Miara łączności Leya oraz Steela jest dana przez:

$$J_{LS(ih)} = \ln \left[\frac{P(i \cap h | y)}{P(i \cap \bar{h} | y) + P(\bar{i} \cap h | y)} \right] = \ln \left[\frac{P(i \cap h | y)}{P(i | y) + P(h | y) - P(i \cap h | y)} \right]. \quad (58)$$

Jej zaletą jest jej przejrzystość interpretacyjna. Wyrażenie wewnątrz logarytmu naturalnego reprezentuje iloraz szans *a posteriori* modeli zawierających obydwie zmienne do modeli zawierających każdą z nich osobno. Ponownie logarytm tego wyrażenia przyjmuje wartości dodatnie, gdy prawdopodobieństwo modeli zawierających obie zmienne dominuje, co świadczy o związku komplementarności. Miara przyjmuje wartości ujemne, gdy szanse *a posteriori* modeli zawierających zmienne oddzielnie są wyższe niż w przypadku, gdy występują one w modelu jednocześnie, co świadczy o substytucyjności.

Doppelhofer i Weeks obliczyli wartości graniczne miary łączności, które pozwalają na zakwalifikowanie zmiennych do jednej z pięciu kategorii. Wartości te są również odpowiednie w przypadku miary łączności Laya i Steela. Wartości graniczne miary łączności i odpowiadające im klasyfikacje związków między zmiennymi zostały przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2

Wartości graniczne miar łączności i klasyfikacja związków między zmiennymi

| Typ zależności między zmiennymi | Wartość miary łączności (J) |
|---------------------------------|---------------------------------|
| Silne substytuty | $J < -2$ |
| Istotne substytuty | $-2 < J < -1$ |
| Zmienne powiązane nieistotnie | $-1 < J < 1$ |
| Istotne zmienne komplementarne | $1 < J < 2$ |
| Silne zmienne komplementarne | $2 < J$ |

Źródło: M. Błażejowski, J. Kwiatkowski, *Bayesian Model Averaging and Jointness Measures for gretl*, „Journal of Statistical Software” Tom 68, Nr 5, 2015, s. 7.

PODSUMOWANIE CZĘŚCI I

W tej części przedstawiono w szczegółowy sposób opis konstrukcji miary synchronizacji cykli koniunkturalnych opartej na odchyleniach komponentów cyklicznych od trendu realnego PKB analizowanych krajów. Zaprezentowano także w jaki sposób zostały skonstruowane miary poszczególnych determinant SCK wraz z opisem źródeł danych. Przedstawiono również strukturę bayesowskiego łączenia wiedzy po modelach wraz z dokładnym opisem rozkładów a priori modelu oraz parametru g Zellnera, a także możliwe do obliczenia w ramach BMA miary łączności, które pozwalają na ustalenie związków substytucyjności i komplementarności pomiędzy analizowanymi regresorami. W drugiej części artykułu bayesowskie łączenie wiedzy po modelach oraz miary łączności zostaną zaaplikowane do zestawu danych przedstawionych w części pierwszej.

BIBLIOGRAFIA

- Baxter M., King R., *Measuring Business cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*, „The Review of Economics and Statistics”, Tom 81, Nr 4, 1999.
- Baxter, M., Kouparitsas, M., *Determinants of business cycle comovement: a robust analysis*, „Journal of Monetary Economics”, Tom 52, Nr 1, 2005.

- Beck K., *Bayesian Model Averaging and Jointness Measures: Theoretical Framework and Application to the Gravity Model of Trade*, „Statistics in Transition”, Tom 18, Nr 3, 2017.
- Beck K., *Determinants of Business Cycles Synchronization in the European Union and the Euro Area*, „Equilibrium. Quarterly Journal of Economics and Economic Policy”, Tom 8, Nr 4, 2013.
- Beck K., *Determinanty synchronizacji cykli koniunkturalnych w krajach Unii europejskiej w latach 1990–2007*, „Gospodarka w Teorii i Praktyce”, 1(34), 2014.
- Beck K., *Spectral analysis and the Application of filters in the examination of business cycles*, „Myśl Ekonomiczna i Polityczna” 2017 nr 3(58).
- Beck K., *Structural Similarity as a Determinant of Business Cycles Synchronization in the European Union: a Robust Analysis*, „Research in Economics and Business: Central and Eastern Europe”, Tom 5, Nr 2, 2013.
- Beck K., *Zastosowanie filtrów do analizy cykli koniunkturalnych i synchronizacji cyklu koniunkturalnego Polski z krajami europejskimi*, „Wiadomości Statystyczne” 2017 nr 667(10).
- Błażejowski M., Kwiatkowski J., *Bayesian Model Averaging and Jointness Measures for gretl*, „Journal of Statistical Software” Tom 68, Nr 5, 2015.
- Chang K., Kim Y., Tomaljanovich M., Ying Y., *Do political parties foster business cycles? An examination of developed economies*, „Journal of Comparative Economics”, Tom 41, Nr 1, 2013.
- Clark T.E., van Wincoop E., *Borders and business Cycles*, „Journal of International Economics”, Tom 55, Nr 1, 2001.
- Doppelhofer G., Weeks M., *Jointness of Growth Determinants*, „Journal of Applied Econometrics”, Tom 24, Nr 2, 2009.
- Duval R., Cheng K., Hwa Oh K., Saraf R., Seneviratne D., *Trade Integration and Business Cycle synchronization: A Reappraisal with Focus on Asia*, „IMF Working Paper Series”, WP/14/52, 2014.
- Feenstra R., Inklaar R., Timmer M., *The Next Generation of the Penn World Table*, 2013, available for download at www.ggd.net/pwt
- Fernández C., Ley E., Steel M., *Benchmark priors for Bayesian model averaging*, „Journal of Econometrics”, Tom 100, Nr 2, 2001.
- Fidrmuc J., *The Endogeneity of Optimum Currency Area Criteria, Intra-Industry Trade and EMU Enlargement*, „Contemporary Economic Policy”, Tom 22, Nr 1, 2004.
- Foster D., George E., *The Risk Inflation Criterion for Multiple Regression*, „The Annals of Statistics”, Tom 22, Nr 4, 1994.
- Foster D., George E., *Calibration and empirical Bayes variable selection*, „Biometrika”, Tom 87, Nr 4, 2000.

- Frankel J.A., Rose A.K., *The Endogeneity of the Optimum Currency-Area Criteria*, „Economic Journal”, Tom 108, Nr 449, 1998.
- Furnival G.M., Wilson R.W. Jr., *Regression by leaps and bounds*, „Technometrics”, Tom 16, Nr 4, 1974.
- George E., McCulloch R., *Variable Selection Via Gibbs Sampling*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 88, Nr 423, 1993.
- Heston A., Summers R., Aten B., *Penn World Table Version 7.1*, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania 2012.
- Hoeting J., Madigan D., Raftery A., Volinsky C., *Bayesian Model Averaging: A Tutorial*, „Statistical Science”, Tom 14, Nr 4, 1999.
- Kass R., Wasserman L., *A Reference Bayesian Test for Nested Hypotheses and Its Relationship to the Schwarz Criterion*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 90, Nr 431, 1995.
- Krugman P., *Geography and Trade*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
- Laud P., Ibrahim J., *Predictive specification of prior model probabilities in variable selection*, „Biometrika”, Tom 83, Nr 2, 1996.
- Ley E., Steel M., *Jointness in Bayesian variable selection with applications to growth regression*, „Journal of Macroeconomics”, Tom 29, Nr 3, 2007.
- Ley E., Steel M., *On the Effect of Prior Assumptions in Bayesian Model Averaging with Applications to Growth Regressions*, „Journal of Applied Econometrics”, Tom 24, Nr 4, 2009.
- Liang F., Paulo R., Molina G., Clyde M., Berger J., *Mixture of g Priors for Bayesian Variable Selection*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 103, 2008.
- Madigan D., Raftery A.E., *Model selection and accounting for model uncertainty in Graphical models using Okam's widow*, „Journal of the American Statistical Association”, Tom 89, Nr 428, 1994.
- Madigan D., Raftery A.E., Volinsky C., Kronmal R., *Bayesian model averaging in proportional hazard models: assessing the risk of a stroke*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)”, Tom 46, Nr 4, 1997.
- Madigan D., York J., Allard D., *Bayesian Graphical Models for Discrete Data*, „International Statistical Review”, Tom 63, Nr 2, 1995.
- Raftery A.E., Madigan D., Hoeting J.A., *Bayesian model averaging for linear regression models*, Journal of the American Statistical Association. Tom 92, Nr 437, 1997.
- Raftery A.E., Painter I., Volinsky C.T., *BMA: An R package for Bayesian Model Averaging*, „R News” Tom 5, Nr 2, 2005.

- Rana, P.B., *Trade Intensity and Business Cycle Synchronization: The Case of East Asian Countries*, „The Singapore Economic Review”, Tom 53, No. 2, 2008.
- Rose A.K., *Understanding Business Cycle Synchronization: Is inflation targeting Paving the Way to Asian Monetary Union?*, [w:] (red). R.J. Barro, J.W. Lee, *Costs and Benefits of Economic Integration in Asia*, Oxford Scholarship Online, 2011.
- Siedschlag I., *Patterns and Determinants of Business Cycles Synchronization in Enlarged European and Monetary Union*, „Eastern Journal of European Studies”, Tom 1, Nr 1, 2010.
- Zellner, A., *On Assessing Prior Distributions and Bayesian Regression Analysis with g Prior Distributions*, [w:] (red). P.K. Goel, A. Zellner A., *Bayesian Inference and Decision Techniques: Essays in Honor of Bruno de Finetti*. Studies in Bayesian Econometrics 6, Elsevier, New York, 1986.

DETERMINANTY SYNCHRONIZACJI CYKLI KONIUNKTURALNYCH:
ANALIZA Z WYKORZYSTANIEM BMA I MIAR ŁĄCZNOŚCI.
CZEŚĆ I – METODYKA BADANIA

Streszczenie

Synchronizacja cykli koniunkturalnych ma fundamentalne znaczenie dla integrujących się gospodarek. Tylko kraje charakteryzujące się wysokim stopniem synchronizacji cykli koniunkturalnych mogą tworzyć efektywnie funkcjonujące unie walutowe. Jest tak dlatego, że ponadnarodowy bank centralny może skutecznie prowadzić jednolitą politykę pieniężną w sytuacji, gdy kraje należące do unii monetarnej znajdują się w tej samej fazie cyklu koniunkturalnego. Z tych względów bardzo ważnym jest problem determinant synchronizacji cykli koniunkturalnych. W pierwszej części artykułu przedstawiono w szczegółowy sposób opis konstrukcji miary synchronizacji cykli koniunkturalnych (SCK) opartej o odchylenia komponentów cyklicznych od trendu realnego PKB analizowanych krajów. Zaprezentowano także, w jaki sposób zostały skonstruowane miary poszczególnych determinant SCK wraz z opisem źródeł danych. Ponadto przedstawiono także strukturę bayesowskiego łączenia wiedzy o modelach oraz miary łączności. W drugiej części artykułu zostaną one zaaplikowane do opisanego zbioru danych.

**BUSINESS CYCLE SYNCHRONISATION DETERMINANTS:
ANALYSIS WITH THE USE OF BMA AND LINKAGE MEASURES.
PART I – RESEARCH METHODOLOGY**

Summary

Business cycle synchronisation is of fundamental importance for integrating economies. Only countries characterised by a high level of business cycle synchronisation may create effectively operating currency unions. It is due to the fact that the supranational central bank may efficiently implement a uniform monetary policy in a situation when countries belonging to a monetary union are in the same phase of the business cycle. That is why the issue of determinants of business cycle synchronisation is very important. The first part of the article presents a detailed description of the construction of business cycle synchronisation (BCS) based on fluctuations of cyclical components from the regular GDP trend in countries analysed. The way in which the measures of particular BCS determinants were constructed is also presented and a description of the sources of data is provided. Moreover, the article also presents the structure of Bayesian inference based on knowledge of statistical models and measures of their relationships. They are applied to a described set of data in the second part of the article.

**ДЕТЕРМИНАНТЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ:
АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВМА (БАЙЕСОВСКОГО МОДЕЛЬНОГО
УСРЕДНЕНИЯ) И ИЗМЕРИТЕЛЯ КАНАЛОВ СВЯЗИ.
ЧАСТЬ I – МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ**

Резюме

Синхронизация экономических циклов имеет основополагающее значение для интеграции экономики. Только государства с высоким уровнем синхронизации экономических циклов могут создать эффективный валютный союз. Это связано с тем, что транснациональный центральный банк может эффективно проводить единую денежно-кредитную политику только в том случае, когда страны валютного союза находятся в одной и той же фазе экономического цикла. В связи с этим чрезвычайно важной является проблема

детерминантов синхронизации экономических циклов. В первой части статьи дано подробное описание структуры меры синхронизации экономических циклов (SCK), основанной на отклонении циклических компонентов от тенденции реального ВВП рассматриваемых государств. Кроме того, был представлен метод измерения конкретных детерминантов синхронизации экономических циклов (SCK) вместе с описанием источников данных, а также структура байесовских сетей доверия на основе моделирования и измерения сетей. Во второй части статьи они будут применены к описанной базе данных.